УДК 620.9

Моделирование неизотермических свободных струй с твердыми включениями

Авдюнин Е.Г., д-р техн. наук, Магницкий В.А., асп.

Разработана математическая модель процесса истечения нагретой струи в холодное пространство и проведен численный эксперимент. Представлены результаты сравнения расчета с помощью математической модели с экспериментальными данными.

Ключевые слова: математическая модель, струя, численный эксперимент, система уравнений.

The modeling of nonisotermic free jets with solid particles

Avdyunin E.G., doctor of science, Magnitskiy V.A., graduate student

A mathematic model of a hot jets outcome int cold space has been developed and a numeric experiment has been carried act. The finalings obtained by using the mathematic model were compared with the experimental data.

Keywords: mathematical model, streem, numerical experiment, system of the equations.

Разработка схем и оборудования для интенсификации процессов тепло- и массообмена с использованием ВЭР является в настоящее время актуальной проблемой. Эффективность работы теплоутилизационного оборудования зависит от физико-химических процессов, происходящих в теплоагрегате и утилизационном оборудовании. Эффективность работы теплоутилизатора определяется количеством ВЭР и их потенциалом.

На предприятии «Термометр» г. Клин в цехе установлены две камеры формирования стеклянных шариков. Дымовые газы, уходя из камеры формирования, смешиваются с воздухом цеха и удаляются через зонт.

Уходящие из камеры формирования газы можно считать свободной струей сжимаемого газа. Струя дымовых газов имеет температуру, отличающуюся от температуры окружающего воздуха. Решение задачи теплообмена между покоящимся воздухом и нагретой струей возможно лишь после того, как будут определены законы изменения температуры вдоль струи и в ее поперечном сечении.

Струя делится на три участка: начальный, основной и переходный. В начальном участке изменения температур, плотностей, массы происходят в пограничном слое струи. Он заканчивается, когда пограничный слой распространяется по всему поперечному сечению струи.

В связи с тем, что движение газа в начальном и переходном участках осуществляется под действием положительного градиента давления, их можно рассматривать как единый участок. Кроме того, переходный участок имеет незначительную протяженность, по сравнению с основным участком.

Уравнение сохранения импульса управляет распределением компонент скорости и выражает влияние следующих механизмов: конвекции, градиента давления, массовых сил объемного характера и вязкого взаимодействия:

$$d(\rho U_i)/d\tau + \mathrm{div}(\rho U_j U_i) = -dP/dX_i + S_i + \mathrm{div}(\tau_{ij}). \quad (1)$$

Первый член в правой части – градиент давления, выражающий его изменение по соответствующей координате. Второй член представляет *i*-составляющую силы, приложенной к единице объема и имеющей физический смысл источника или стока импульса. Последний член выражает перенос *i*-компоненты импульса эффектами вязкости и турбулентного перемешивания. Соответствующие сдвиговые напряжения зависят от градиентов местной скорости и величины вязкости (точнее, эффективной вязкости):

$$(\tau)_{ij} = (\mu)_{эфф}(dU_i/dX_j + dU_j/dX_i). \quad (2)$$

Плотность изменяется в пространстве в результате температурных неоднородностей. Поэтому необходимо иметь вспомогательное соотношение для связи ρ с температурой. Составляющие объемных сил воздействуют на перераспределение количества движения. В качестве источника импульса выступает градиент давления dP/dX_i. Часть вязких членов $div(\tau_{ij})$, которые нельзя выразить в форме $div(\mu \mathrm{grad} U_i)$, можно также рассматривать в качестве составляющих общего источника.

Все эти уравнения управляют гидродинамикой рассматриваемого процесса, однако в общем случае их нельзя решить как самостоятельную систему. Для этого необходимо, с одной стороны, знать, как плотность зависит от температуры и концентраций, с другой стороны, нужно определить пространственное изменение эффективной вязкости. Для более полной информации об этих процессах мы должны решить уравнение энергии, уравнения сохранения концентраций и уравнения модели турбулентности для вычислений эффективной вязкости.

Независимыми переменными являются x_1, x_2, x_3, представляющие координаты по осям x, y, u z соответственно. Компоненты скорости в каждом из этих направлений обозначаются символами U_i , где нижний индекс i (или j), в соответствии с тремя пространственными координатами, принимает значения 1,2,3. В координатной системе с использованием этих обозначений уравнение неразрывности для потока приобретает следующую форму:

$$d(\rho)/d\tau + \mathrm{div}(\rho U_i) = S_m. \qquad (3)$$

Необходимо отметить, что плотность, в общем случае, переменна в пространстве в основном из-за температурных изменений. Источники массы S_m могут появляться в основном по двум причинам: во-первых, если в потоке присутствуют две взаимно проникающие среды, то вещество может передвигаться от одной фазы к другой, и во-вторых, S_m вводят в вычислительный процесс на ранних стадиях расчетов для определения итерационных поправок к исходным приближениям полей скорости, давления и плотности.

Проведенное выше рассмотрение дифференциальных уравнений, описывающих конвективный перенос импульса, теплоты, массы и турбулентных характеристик, показывает, что, хотя эти уравнения получаются из различных физических принципов, все они могут быть представлены в одной стандартной форме. Если обозначить зависимую переменную через Φ, то обобщенное дифференциальное уравнение примет вид

$$d(\rho\Phi)/dt + \mathrm{div}\,(\rho U_i\Phi) = \mathrm{div}\,(J_{ф,i}) + S_ф, \qquad (4)$$

где для ламинарного режима

$$J_{ф,l} = \mu/Pr_ф{*}(d\Phi/dX_i),$$

а при турбулентном течении

$$J_{ф,l} = \mu/Pr_ф{*}d\Phi/dX_i - \rho{*}U_i'\Phi'.$$

Зависимая переменная Φ обозначает различные величины, такие как массовая концентрация, энтальпия, составляющие вектора скорости и т.д. При этом коэффициенту диффузии и источниковому члену следует придать соответствующий каждой из этих переменных смысл.

Для практических целей чаще всего достаточно знания средних значений величин, описывающих динамические и переносные свойства изучаемой системы. При этом предполагается, что имеют место быстрые случайные пульсации усредняемой величины около среднего значения. В результате операции усреднения возникают дополнительные члены – так называемые напряжения Рейнольдса, турбулентный тепловой поток, турбулентный диффузионный поток и т.д.

Во многих моделях турбулентности для выражения турбулентных напряжений и потоков используется концепция коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии. В результате усреднения по времени, уравнения для турбулентного течения имеют тот же вид, что и уравнения для ламинарного течения, с той лишь разницей, что коэффициенты молекулярного обмена заменяются на эффективные, т.е. молекулярные плюс турбулентные.

Турбулентный поток описывается уравнением

$$-\rho{*}U_i'\Phi' = \mu_m/Pr_{m,ф}{*}(d\Phi/dX_i), \qquad (5)$$

где $Pr_{m,ф}$ – турбулентное число Прандтля (Шмидта). Если ввести эффективный диффузионный коэффициент $D_{эф,ф} = \mu/Pr_ф + \mu_m/Pr_{m,ф}$, то

$$J_{ф,i} = D_{эф,ф}{*}(d\Phi/dX_i). \qquad (6)$$

На практике течение в аппаратах чаще всего турбулентно. В этом случае необходимо, как минимум, использование моделей, состоящих из двух уравнений, не содержащих соотношений для масштаба турбулентности. Примером такой модели является широко распространенная $k - \varepsilon$ [5, 6] (кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации). Основным является допущение о том, что свойства турбулентности можно охарактеризовать двумя величинами: k и ε. Они позволяют рассчитать значение коэффициента турбулентной вязкости по соотношению Колмогорова

$$\mu_m = C_m\rho k^2/\varepsilon, \qquad (7)$$

где $k = 0{,}5(U_i')^2$; $\varepsilon = m(dU_i'/dX_i)^2/\rho$.

В аппарате турбулентного моделирования k и ε рассматриваются как удовлетворяющие транспортным уравнениям, во многом подобным тем, которые управляют переносами импульса и энергии.

Тот факт, что все интересующие нас дифференциальные уравнения, описывающие процессы переноса, можно рассматривать как частные случаи обобщенного уравнения, позволяет ограничиться численным решением уравнения (4) с соответствующими начальными и граничными условиями.

Для завершения математической постановки задачи необходимо определить граничные условия, для которых нужно получить решения дифференциальных уравнений. Они определяются режимными и конструктивными характеристиками аппаратов. В начальный момент времени значения всех зависимых переменных полагаются известными. Для рассматриваемых течений имеют значения только граничные условия на входе в аппарат и вдоль его стенок. В силу особенностей численного метода решения [6], не требуется никакой информации о выходе потока. Гидродинамические граничные условия особенно легко сформулировать для ограничивающих поток твердых, неподвижных стенок: компоненты скорости следует положить равными нулю.

На входе необходимо задать значения всех трех составляющих скорости. Для уравнения энергии и концентрации также имеется необходимость описания условий входа. Обычно их распределения предполагаются однородными и равномерными поперек входного сечения, хотя никаких трудностей не вызывает получение решений и для любого произвольного распределения.

Температурные и концентрационные условия на стенках могут быть различного типа. В общем случае можно сказать, что теоретические граничные условия представляются функциями, связывающими температуру стенки и пристенную концентрацию с тепловыми и массовыми потоками. Из общих соображений можно представить, что потоковые граничные условия могли бы быть выражены математически через спецификацию градиентов на стенке. Причина заключается в том, что вблизи стенки эффективные диффузионные коэффициенты изменяются столь быстро, что возможность рассчитать детали изменения профиля h или C в этой области очень мала.

На входе в аппарат устанавливают величины энергии турбулентности и скорости ее диссипации. Обычно кинетическая энергия турбулентности полагается пропорциональной квадрату осредненной входной скорости, а величина диссипации выбирается таким образом, чтобы масштаб турбулентности был величиной порядка 1/10 от размеров канала.

На твердых стенках энергия турбулентности и скорость ее диссипации равны нулю. Однако это неудобное краевое условие из-за очень сильных изменений k и ε, которые происходят в пристенном слое. Практически гораздо удобнее рассматривать ближайшую к стенке точку поля как единственно возможное место постановки граничных условий.

Такой подход обычно классифицируют как практику использования пристенных функций. В нем предполагается, что весь пристенный слой является единым целым, включающим в себя сопротивления переносу тепла и массы, которые зависят от числа Рейнольдса и других факторов. Это приводит к тому, что потоковое граничное условие обеспечивает разность температур между стенкой и точкой внутри турбулентного ядра жидкости на небольшом расстоянии от нее.

Основой вычислительной процедуры является неявная конечно-разностная схема, приводящая к консервативным системам алгебраических уравнений [6]. Они получаются при последовательной реализации двух основных этапов: разбиение области течения на небольшие дискретные элементы путем создания конечно-разностной сетки в направлениях координатных осей; интегрирование дифференциальных уравнений переноса по специально выделенным ячейкам сетки или контрольным объемам.

При решении уравнения, составляющие систему, подвергаются обработке для получения их конечно-разностной алгебраической формы. Согласно используемому методу, задача решается одновременно на всем интересующем пространстве, включающем разнородные зоны. Законы сопротивления и переноса, управляющие интенсивностью источников (стоков) теплоты и импульса, назначаются в узловых точках исходя из режимных и конструктивных особенностей решаемой задачи. При этом внутрь потока передается информация только о тех краевых условиях, которые определены для внешних границ расчетной области.

Результирующее уравнение связывает узловые значения искомой величины с соседними точками:

$$a\Phi = e\Phi_{i+1} + w\Phi_{i-1} + n\Phi_{j+1} + s\Phi_{j-1} + h\Phi_{k+1} + l\Phi_{k-1} + B, \quad (8)$$

где e, w, n, s, h, l, B – соответствующие коэффициенты. Эти параметры выражают влияние конвективных и диффузионных процессов через границы контрольного объема и наличие источников (стоков).

Конечно-разностные уравнения для сохранения импульса имеют отличие, которое заключается в присутствии специального источникового члена уравнения – градиента давления. Однако поле давления заранее неизвестно, поэтому уравнения сохранения импульса решаются с использованием предполагаемых значений давления.

Как правило, определенные из решения уравнения импульсов поля скоростей U^*, V^* и W^* не удовлетворяют условиям неразрывности потока, и поэтому требуется их дополнительная коррекция, которая осуществляется с помощью уравнения поправки давления.

Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений из-за сильной внутренней взаимосвязи используются итерационные алгоритмы, которые реализуются до достижения заданной точности расчетов [6].

После преобразований получим решение системы дифференциальных уравнений. Полученное решение описывает реальный процесс истечения с учетом искривления траектории движения оси струи вследствие разности плотностей двух сред. Дымовые газы, уходящие из камеры формирования, перемешиваются с холодным воздухом, который опускается вниз и выталкивает теплую газовую смесь. По закону сохранения импульса, в случае переменной массы подъемная сила, действующая на теплую массу газовоздушной смеси, имеет вид

$$dP = mdv + vdm. \qquad (9)$$

На рис. 1 представлен график искривления оси нагретой струи при смешении с холодным воздухом и результаты опытов ЦКТИ [2–4].

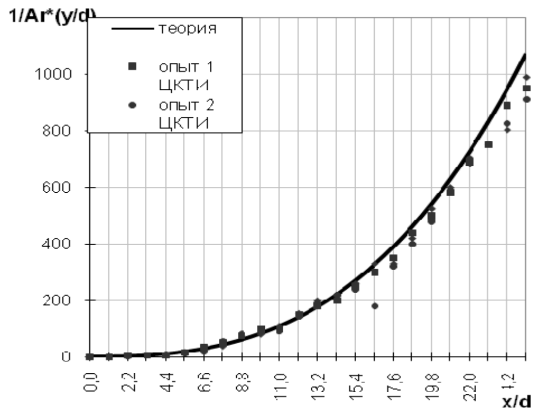

Рис. 1. Искривление струи по теореме теплых и холодных струй

Проведя преобразования и перейдя к безразмерным величинам, получим уравнение для скорости вертикального «всплытия» теплой струи:

$$v/v_0 = k(u_{cp2}/u_0)\{c_1 + \int[\partial(x/x_0)/(u_{cp2}/u_0)]\}, \qquad (10)$$

и соотношение для траектории искривления оси струи:

$$y/y_0 = 0{,}36K\,[(x/x_0)^3 - 0{,}86\,(x/x_0)]. \qquad (11)$$

Струя, истекающая из камеры формирования, является двухфазной, так как в ней присутствуют стеклянные капли. На частицы действует бóльшая сила тяжести, чем на газовоздушную смесь. Если в начальном участке струи пыль имеет скорость, равную скорости струи, то в основном участке скорость капель падает и они начинают тормозить газовый поток. Поэтому закон изменения скорости двухфазной струи запишется следующим образом:

$$u_m/u_0 = [1 + x_0\,(u_m/u_0)]^{0,5}/ax(c)^{0,5}/R\,. \qquad (12)$$

На рис. 2 показаны изменения скорости вдоль оси струи для процесса истечения с учетом искривления струи и наличия примесей и без искривления. Для определения адекватности модели истечения были рассчитаны поля скоростей и температур в различных сечениях струи. В результате проведенного численного эксперимента получено, что распределение скоростей в различных сечениях соответствует данным, полученным Маттиоли [5].

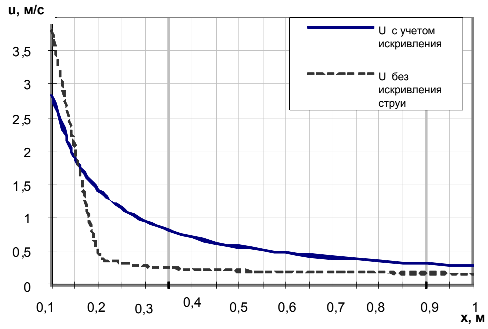

Рис. 2. Изменение скорости вдоль оси струи с учетом искривления струи и без него

На рис. 3 приведены результаты численного моделирования полей температур в различных сечениях струи и результаты опытов Эйлера и Фертмана [3, 4].

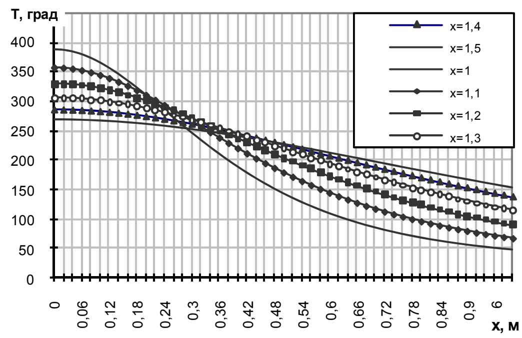

Рис. 3. Температурные поля струи в различных сечениях

Заключение

Сравнительный анализ результатов расчета разработанной математической модели процесса истечения нагретой струи в холодное пространство и проведенного численного эксперимента показал их удовлетворительное соответствие.

Список литературы

1. **Абрамович Г.Н**. Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, 1976.

2. **Абрамович Г.Н**. Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. – М.: Государственное энергетическое издательство, 1948.

3. **Аэродинамика** потока // Труды ЦАГИ. – 1935. – № 223.

4. **Теория** свободной струи // Труды ЦАГИ. – 1937. – № 293.

5. **Маттиоли Г.Д.** Теория, динамика турбулентных течений жидкостей. – М.: Наука, 1937.

6. **Патанкар С**. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984.

Авдюнин Евгений Геннадьевич,
Ивановский государственный энергетический университет,
доктор технических наук, профессор кафедры промышленной теплоэнергетики,
e-mail: avdunin@pte.ispu.ru

Магницкий Валерий Александрович,
Ивановский государственный энергетический университет,
аспирант, старший преподаватель кафедры высшей математики,
адрес: г. Иваново, ул. К. Маркса, д. 34, кв. 15.